数理解析研究所講究録
77巻 1969年 54-66



# ある種の $C^*$-代数の生成について

東北大 教養 岡安隆照

## §1、緒言

von Neumann 代数の生成に関する議論は未だ大分不満を残してはいるが，非常に興味深い幾つかの結果を含んでいること勿論である．それらの研究が $C^*$ 代数の生成についての多くの問題を自然に提起するわけで，事実この課題に関する報告が最近散見されるのである．その目ざすところは，von Neumann 代数の生成の議論と同様に，代数的な興味と共に，non-normal operators の構造の解析であろう．しかしながら，von Neumann 代数の生成の議論の，又 $C^*$-代数の理論の現状では，多くを期待することは難かしいことかもしれない．

以下本講演では特に GCR-代数を生成するような operator 即ち GCR-operator を中心に，$C^*$ 代数の生成に関する最近の結果を述べてみたいと思う．

$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間，$\mathbb{F}$ をその上の有界な linear operators

(以下単に operators) の族とするとき，$\mathbb{F}$ を含む $\mathfrak{H}$ 上の最小の von Neumann 代数を $\mathbb{R}(\mathbb{F})$ と書き，それは $\mathbb{F}$ によって"von Neumann 代数として"(混乱が無ければ省く)生成されるという．又 operator $T$ は，$\mathbb{R}(T)$ が I 型，II 型，III 型のとき，それぞれ I 型，II 型，III 型であるといわれることは既に多くの研究者によって行われている．可分な Hilbert 空間上の可換な von Neumann 代数が一つの self-adjoint operator で生成されるということはよく知られている([12])．又 C. Pearcy は，可分な Hilbert 空間上の I 型の von Neumann 代数は一個の operator で生成されることを示した([15])．各々の型の operator が存在すること，のみならず各々の型の partial isometry が存在することもわかっている([16])．なお von Neumann 代数の生成に関する文献は [18] に詳しい．

さて Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上の operators の族 $\mathbb{F}$ に対し，$\mathbb{A}(\mathbb{F})$ で $\mathbb{F}$ と $\mathfrak{H}$ 上の identity operator $I$ を含む $\mathfrak{H}$ 上の最小の $C^*$ 代数を表わすことにしよう．そして $\mathbb{A}(\mathbb{F})$ は $\mathbb{F}$ によって"$C^*$-代数として"(混乱が無ければ省く)生成されるというわけである．上記の von Neumann の生成定理に相当する，$C^*$ 代数についての定理は全く知られていないが，多少ともそれに近いものとして次の事実がわかっている．

定理. 一つの Hilbert 空間上の可換な $C^*$-代数が，それに含まれる可算個の idempotents によって $C^*$-代数として生成されているならば，それは一個の self-adjoint operator によって生成される（[17], pp. 293-294).

§2. GCR-operators, 特に isometries.

定義. Hilbert 空間 H 上の operator T は $\mathfrak{A}(T)$ が CCR-代数, GCR-代数, NGCR-代数であるとき，それらに応じて CCR-operator, GCR-operator, NGCR-operator であるといわれる.

CCR-代数, GCR-代数, NGCR-代数は最近ではそれぞれ liminal algebra, postliminal algebra, antiliminal algebra とも呼ばれるのであるが，詳しくは J. Dixmier の text [6] を [9], [11], [19] と共に参照されたい.

勿論 CCR-operator は GCR-operator であり，GCR-代数はその任意の表現による像が I 型の von Neumann 代数を生成するような $C^*$-代数として特徴づけられるのであるから，GCR-operator は I 型である. 又 II 型又は III 型の operator は NGCR-operator であることも容易にわかる.

任意の normal operator, 任意の compact operator は CCR-operator であり，任意の isometry はそれが I 型であること ([20]) から直接 GCR-operator であることがわかる.

これらのGCR-operatorsは凡てI型であるが，I型であってもGCR-であるとは限らないのであって，そのようなoperatorを捜す事も難かしくはない（§4）.

isometryが生成する$C^*$-代数の構造は次の意味で完全にわかる.

定理（L.A. Coburn[4]）. Hilbert空間$H$上のisometry $V$が生成する$C^*$-代数$\mathfrak{A}(V)$は最小の閉ideal $\mathfrak{J}$をもち，（それはelementaryで）$\mathfrak{A}(V)/\mathfrak{J}$は単位円周$\Gamma$上の複素数値連続函数の全体が作る可換な$C^*$-代数$C(\Gamma)$と同型である.

その証明は自然である. 先ず重複度1のshift $S$が生成する$C^*$-代数$\mathfrak{A}(S)$は"正則的に既約"で（換言すればcompact operatorsの全体$\mathbb{K}$を含んでしまい），従ってまたそれは$\mathfrak{A}(S)$の最小の閉idealで，$\mathfrak{A}(S)/\mathbb{K}$が$C(\Gamma)$と同型になることをみるのである. 実際 $I-SS^*$は1次元の部分空間への射影であるからcompactになり，これが$\mathfrak{A}(S)$に入るから$\mathbb{K}\subset\mathfrak{A}(S)$が得られる（[7], p. 85）. そして$\mathbb{K}$が最小の閉idealであることもわかる. 又$\mathfrak{A}(S)$から$\mathfrak{A}(S)/\mathbb{K}$への自然な準同型写像による$S$の像$S'$はunitaryでそのspectrumは$\Gamma$一杯になっていることがわかるので，$\mathfrak{A}(S)/\mathbb{K}$は$C(\Gamma)$と同型になる. 次に重複度$\alpha$のshift $S$について考える. それは重複度1のshift $S_0$のampliationであるから，$\mathfrak{A}(S)$は$\mathfrak{A}(S_0)$と

同型になる。所で一般に任意の isometry $V$ は unitary $U$ と shift $S$ の直和 $U \oplus S$ である([10])から，任意の $T \in \mathfrak{A}(V)$ は $T = T_1 \oplus T_2$, $T_1 \in \mathfrak{A}(U)$, $T_2 \in \mathfrak{A}(S)$ と書かれるのであるが，これに $T_2$ を対応させる写像を考えるとそれによって $\mathfrak{A}(V)$ は $\mathfrak{A}(S)$ と同型になるのである。

なお L.A. Coburn は [5] で $H^2$ 上の Toeplitz operator $T_z$ が生成する $C^*$-代数の構造を上定理よりも多少具体的に調べている。

normal operator も isometry もいわゆる nearly normal operator であるが，実は任意の nearly normal operator が GCR-operator であることがわかる([2], [24])。nearly normal operator は互いに可換な self-adjoint operator と isometry との積として書くことの出来る operator でもあること([3])を想起すれば，下に述べる定理が意味をもってくる([14])。

<u>定理. Hilbert 空間 $H$ 上の GCR-operators $S, T$ が互いに可換で，$S^*$ と $T$ も互いに可換ならば，それらの積 $ST$ は GCR-operator である。</u>

実際，$\mathfrak{A}(S)$ と $\mathfrak{A}(T)$ の代数的な tensor 積 $\mathfrak{A}(S) \odot \mathfrak{A}(T)$ の上の $\alpha$-norm と $\nu$-norm は一致している([21])から，$\mathfrak{A}(S) \odot \mathfrak{A}(T)$ から $\mathfrak{A}(S, T)$ の中への自然な準同型写像は $\alpha$-norm に関して連続になり([13])，それを $\alpha$-積 $\mathfrak{A}(S) \hat{\otimes}_\alpha \mathfrak{A}(T)$ 上

に連続的に拡張することが出来る．そのとき $\mathfrak{A}(S)\hat{\otimes}_\alpha\mathfrak{A}(T)$ の像はちょうど $\mathfrak{A}(S,T)$ になる．しかるに $\mathfrak{A}(S)\hat{\otimes}_\alpha\mathfrak{A}(T)$ はGCR-代数である（[22]）から $\mathfrak{A}(S,T)$ もまたGCR-代数，従って $\mathfrak{A}(ST)$ もGCR-代数である．

$T^*T-TT^*$ が compact operator になるような operator $T$ を almost normal operator と呼んでいる著者があったように思うが，この類の operators も GCR-operators である（cf. [1], [2]）．

<u>定理．非可換な2変数の多項式 $p$ は，$p(S,S^*)=0$ を満足する Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上の operator $S$ が常に GCR-operator になってしまうようなものであるとし，$C$ を $\mathfrak{H}$ 上の compact operator とすれば $p(T,T^*)=C$ を満足する $\mathfrak{H}$ 上の operator $T$ は GCR-operator である．</u>

証明は省く．

§3．<u>I 型の von Neumann 代数の GCR-operator による生成．</u>

既に述べた様に，可分な Hilbert 空間上の I 型の von Neumann 代数は一個の operator によって von Neumann 代数として生成されるのであるが，一個の GCR-operator によって von Neumann 代数として生成されるであろうか．本章ではこの問題を肯定的に解いてみたい（[14]）．

<u>定理．可分な Hilbert 空間上の I 型の von Neumann</u>

代数は一個の GCR-operator で，von Neumann 代数として生成される．

これを示すために先ず次の基本定理を示そう．

定理．$\{A_i\}$ を $C^*$-代数の列で，各 $A_i$ は Hilbert 空間 $H_i$ 上に作用し，$H_i$ 上の identity operator を含んでいるとする．もしも各 $A_i$ が一つの operator によって生成されているならば，$\{A_i\}$ の $C^*(\omega)$-和 $\sum \oplus^{C^*(\omega)} A_i$ に $H$ 上の identity operator を加えて得られる $H$ 上の $C^*$-代数は一つの operator によって生成される．ただし $H = \sum \oplus H_i$．

証明は本質的に［7］の一補題の証明と同じものである．添数 $i$ は全正整数に亘るものとして示す．各 $i$ に対して $T_i \in A_i$ が $A_i$ を生成しているとしよう．次の条件を満足する二つの複素数列 $\{\lambda_i\}$，$\{\mu_i\}$ と複素平面上の閉円板の列 $\{K_i\}$ を撰ぶのは容易である：

(a) $\lambda_i \neq 0$；

(b) $K_i$ の中心を $\gamma_i$，半径を $\delta_i$ とするとき

$$0 < \gamma_i \downarrow 0, \quad \delta_i \downarrow 0;$$

(c) $K_i \cap K_j = \phi$, $i \neq j$；

(d) $S_i = \lambda_i T_i + \mu_i I$ とするとき $\sigma(S_i) < K_i$；

そして

(e) $\{S_i\}$ は一様位相に関して $0$ に収束する．

こゝに identity operator は常に $I$ と書くことにする。任意に正整数 $i_0$ を固定し，$L=\sum_{i>i_0}\oplus \mathrm{Id}_i$，$Q=\sum_{i>i_0}\oplus S_i$ とおく。次に $K$ を原点 $0$ を中心とし，$\bigcup_{i>i_0}K_i$ を含む閉円板，$M$ を閉領域 $\bigcup_{1\leq i\leq i_0}K_i\cup K$ とする。又 $M$ 上の函数 $f$ を

$$f(z)=0 \quad \text{if} \quad z\notin K_{i_0};\quad =1 \quad \text{if} \quad z\in K_{i_0}$$

によって定義する。この $f$ は Mergelyan の定理の仮定を満足するから，我々は $M$ 上で一様に $f$ に収束する多項式の列 $\{p_k\}$ をみつけることができる。

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_i}(p_k(z)-f(z))(zI-S_i)^{-1}dz=p_k(S_i),\ i<i_0;$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}(p_k(z)-f(z))(zI-Q)^{-1}dz=p_k(Q)=\sum_{i>i_0}\oplus p_k(S_i);$$

そして

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_{i_0}}(p_k(z)-f(z))(zI-S_{i_0})^{-1}dz=p_k(S_{i_0})-I$$

から，

$$\|p_k(S_i)\|\leqq \alpha\sup_{z\in M}|p_k(z)-f(z)|,\quad i\neq i_0;$$

$$\|p_k(S_{i_0})-I\|\leqq \alpha\sup_{z\in M}|p_k(z)-f(z)|$$

を満足する定数 $\alpha$ があることがわかり，$S=\sum\oplus S_i$ とおくとき一様位相の下に

$$p_k(S)=\sum\oplus p_k(S_i)\longrightarrow E_{i_0}=\cdots\oplus 0\oplus \overset{i_0}{\overset{\smile}{I}}\oplus 0\oplus\cdots$$

である。故に $E_{i_0}\in \mathfrak{A}(S)$．故に又 $\cdots\oplus 0\oplus S_{i_0}\oplus 0\oplus\cdots\in$

$\mathfrak{A}(S)$. 従って求める定理が得られる.

さて主定理に戻る. 先ず可分な Hilbert 空間の上の homogeneous な von Neumann 代数は一つの GCR-operator で生成されることをみよう. 実際そのような von Neumann 代数は $\mathbb{Z}\otimes\mathbb{B}(L)$ の形をもつ. こゝに $\mathbb{Z}$ は可分な Hilbert 空間の上の可換な von Neumann 代数, $\mathbb{B}(L)$ は可分な Hilbert 空間 $L$ の上の凡ての operators が作る von Neumann 代数である. von Neumann の生成定理によって見出し得る, 正の可逆な operator で $\mathbb{Z}$ を生成するものを $P$ とし, 又 $\dim L=1$, $1<\dim L<\infty$, $\dim L=\infty$ に従って $\mathbb{B}(L)$ の operator $1$,
$$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & 0 \\ I & \ddots & \\ 0 & \ddots\; I & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & \cdot & 0 \\ I & \ddots & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$
を $S$ とすると, $\overset{\mathbb{R}}{\mathfrak{A}}(S)=\mathbb{B}(L)$ で, GCR-operator $T=P\otimes S$ に対して $\overset{\mathbb{R}}{\mathfrak{A}}(T)=\mathbb{Z}\otimes\mathbb{B}(L)$ であることがわかる.

そこで定理に与えられた von Neumann 代数 $\mathbb{R}$ を homogeneous な von Neumann 代数の直和 $\sum\oplus\mathbb{R}_i$ と書けば, 各 $\mathbb{R}_i$ は一つの GCR-operator $T_i$ によって生成され, いま $\{\mathfrak{A}(T_i)\}$ の $C^*(\infty)$-和 $\mathfrak{A}$ を考えると これは勿論 ~~[illegible]~~ weak topology に関して $\mathbb{R}$ で稠密な GCR-代数である. しかも上述の定理によれば, $\mathfrak{A}$ は一個の operator で生成されるが, それが求めるものになる.

## §4. NGCR-operators.

II型又はIII型のoperatorはNGCR-operatorなのであるから，NGCR-operatorsの例には事欠かないのであるが，構造の知られているNGCR-代数であるUHF-代数（[8]）を生成するoperatorが存在することがわかっている。

定理（D. Topping [23]）．一つのHilbert空間$\mathfrak{H}$上のUHF-代数$\mathbb{A}$は一個のoperatorで生成される．従って又$\mathfrak{H}$が可分ならば，$\mathfrak{H}$上に作用する"既約な"，従って又I型のNGCR-operatorが存在する．

UHF-代数はいわゆる因子分解が出来る$C^*$代数なのであって，有限型でI型の因子の列$\{M_n\}_{n=1,2,\dots}$が次の条件を満足して存在する：

(a) $I \in M_n \subset \mathbb{A}$;

(b) $n \neq m$ならば$M_n$と$M_m$はoperator-wiseに可換；

そして

(c) $\bigcup_{n\geq 1} M_n$は$\mathbb{A}$を生成する．

いま各$M_n$を生成するoperatorを一つづつとって$T_n$とする．Re $T_n$，Im $T_n$はそれぞれ有限個の可換な$M_n$のprojections $\{E_i^{(n)}\}$，$\{F_j^{(n)}\}$の実係数の線型結合として書くことが出来る．そこで$\mathbb{E}=\bigcup_{n\geq 1}\{E_i^{(n)}\}$，$\mathbb{A}_1=\mathbb{A}(\mathbb{E})$；$\mathbb{F}=\bigcup_{n\geq 1}\{F_j^{(n)}\}$，$\mathbb{A}_2=\mathbb{A}(\mathbb{F})$とおくと§1で述べた定理からself-adjoint operators $H_1, H_2$ で $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}(H_1)$, $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}(H_2)$ となるものがある. そこで $T = H_1 + iH_2$ とおくと, これが $\mathfrak{A}$ を生成することになる. 又 $\mathfrak{A}$ の任意の既約表現 $\pi$ は $\mathfrak{A}$ が単純で可分であるから, 忠実で可分になり, $\pi(T)$ は $\pi$ の表現空間の既約な NGCR-operator になる. それを $\mathfrak{A}$ 上に移せば, 求める operator である.

上定理の直接の系として Powers の III型因子は一個の operator によって生成されることがわかる. というのもそれらは凡て UHF-代数の weak closure として得られていたからである.

# 文　献


1. H. Behncke, Structure of certain non-normal operators, Journ. Math. Mech. 18(1968), 103-107.

2. ________, A class of non-normal operators, Preprint.

3. A. Brown, On a class of operators, Proc. Amer. Math. Soc. 4(1953), 723-728.

4. L. A. Coburn, The C*-algebra generated by an isometry, Bull. Amer. Math. Soc. 73(1967), 722-726.

5. ________, The C*-algebra generated by an isometry, II, Preprint.

6. J. Dixmier, Les C*-algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars, Paris(1964).

7. R. G. Douglas and C. Pearcy, von Neumann algebras with a single generator, Preprint.

8. J. Glimm, On a certain class of operator algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 95(1960), 318-340.

9. ________, Type I C*-algebras, Ann. Math. 73(1961), 527-611.

10. P. R. Halmos, Shifts on Hilbert space, Journ. Reine Angew. Math. 208(1961), 102-112.

11. I. Kaplansky, The structure of certain operator algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 70(1951), 219-255.

12. J. von Neumann, Zur Algebra der Funktional-Operationen und Theorie der normalen Operatoren, Math. Ann. 102(1930), 307-427.

13. T. Okayasu, On the tensor products of C*-algebras, Tôhoku Math. Journ. 18(1966), 325-331.

14. ________, On GCR-operators, To appear in Tôhoku Math.

Journ.

15. C. Pearcy, W*-algebras with a single generator, Proc. Amer. Math. Soc. 13(1962), 831-832.

16. ________, On certain von Neumann algebras which are generated by partial isometries, Proc. Amer. Math. Soc. 15(1964), 393-395.

17. C. E. Richart, General theory of Banach algebras, D. van Nostrand, New York(1960).

18. 斉藤, von Neumann 代数の生成について, 数理解析研究所講究録 49, 1-14.

19. S. Sakai, On a characterization of type I C*-algebras, Bull. Amer. Math. Soc. 72(1966), 508-512.

20. N. Suzuki, Isometries on Hilbert spaces, Proc. Jap. Acad. 39(1963), 435-438.

21. M. Takesaki, On the cross-norm of the tensor product of C*-algebras, Tôhoku Math. Journ. 16(1963), 111-122.

22. J. Tomiyama, Applications of Fubini type theorem to the tensor product of C*-algebras, Tôhoku Math. Journ. 19(1967), 213-226.

23. D. Topping, UHF algebras are singly generated, Math. Scand. 22(1968), 224-225.

24. T. Yoshino, Nearly normal operators, Tôhoku Math. Journ. 20(1961), 1-4.